Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România — **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**

Filiala Galaţi — **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude”
ediţia a XIV-a
Galaţi, 26 octombrie 2013

Clasa a XII-a

Problema 1.

a) Fie $a\in(1,+\infty)$ şi funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, astfel încât $\ln\left(f^2(x)+1\right)+a\cdot f(x)=x, \forall x\in\mathbb{R}$.

Să se demonstreze că funcţia f admite primitive.

b) Pe mulţimea M se defineşte o operaţie notată multiplicativ, cu proprietatea $x\cdot(y\cdot x)=y,\ \forall x,y\in M$. Să se demonstreze că fiecare din ecuaţiile $a\cdot x=b$ şi $x\cdot a=b$, unde $a,b\in M$, au soluţie unică în M.

Problema 2.

Fie f şi g două funcţii, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care satisfac relaţiile :

$$f(x+y)+f(x-y)=2\cdot f(x)\cdot g(y),\forall x,y\in\mathbb{R} \quad (1)$$

$$g(x-y)-g(x+y)=2\cdot f(x)\cdot f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R} \quad (2)$$

Ştiind că f este o funcţie neidentic nulă, să se demonstreze că:

a) Funcţia f este periodică dacă şi numai dacă funcţia g este periodică şi în acest caz mulţimile perioadelor sunt egale.

b) Dacă există $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$, iar f este continuă, atunci funcţiile f şi g sunt derivabile şi $f'=g,\ g'=-f$.

Problema 3.

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie convexă.

a) Demonstraţi că f este continuă.

b) Demonstraţi că există o funcţie $g:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$, unic determinată, astfel încât $f(x+g(x))=f(g(x))-g(x)$, pentru orice $x\geq 0$.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.
Pentru fiecare subiect se acordă maximum 7 puncte.
Nu se acordă nici un punct din oficiu. Fiecare teză va fi evaluată cu un punctaj de la 0 la 21 puncte.
Timp de lucru : 3 ore